



**Дәріс 2. Басқару жүйесінің  
математикалық моделін  
құру. Операторлық теңдеу.  
Лаплас түрлендіруі.**

PhD, Калиева Н.Б.

# Басқару жүйесі теориясындағы математикалық сипаттаманың негізгі тәсілдері

әр элементті бөлек сипаттау

Элементтер арқылы сипаттау инженер үшін ең табиғи болып табылады – мұндай сипаттауда физикалық қасиеттерді зерттеу негізінде алдымен жеке функционалды элементтер және олардың арасындағы байланыс үшін теңдеулер алынады. Теңдеудің сол жағында – элементтердің физикалық шығыс шамалары (айнымалылары) және олардың уақыт туындылары, оң жағында – элементтерге әсер ететін физикалық кіріс шамалары (айнымалылары). Бұл жағдайда элементтер арасындағы кейбір байланыс бір элемент үшін кіріс шамасы, ал екіншісі үшін шығыс шамасы болады.

тұтас жүйені басқарылатын айнымалылар арқылы сипаттау

Жүйені тұтас сипаттау үшін элементтер теңдеулерінен аралық айнымалыларды жойып, теңдеулерде тек басқарылатын шамалар мен олардың туындыларын қалдырады, олар теңдеулердің сол жақ бөліктерінде жазылады, ал жүйеге әсер ететін ұйытқу және басқаратын әсерлер теңдеулердің оң жақ бөліктерінде жазылады.

жүйе күйінің (күй) айнымалылары арқылы сипаттау

Жүйені күй айнымалылары арқылы сипаттау үшін басқару жүйесінің динамикадағы күйін толық математикалық сипаттауға жеткілікті тәуелсіз айнымалылар жиынтығы енгізіледі. Яғни, жүйенің барлық күй айнымалыларының белгілі бір уақыт нүктесіндегі мәндері және барлық кейінгі сәттердегі әсерлердің берілген мәндері арқылы жүйенің теңдеулерінен басқару жүйесінің барлық күй айнымалыларының мәндерін уақыттың келесі сәттерінде анықтауға болады.

# ОПЕРАТОРЛЫҚ ТЕНДЕУ. ЛАПЛАС ТҮРЛЕНДІРУІ

Лаплас түрлендіруі:

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt.$$

$$p = a + ib$$

$f(t)$  - функцияның түп нұсқасы

$F(p)$  - функцияның бейнесі

$$f(t) \xrightarrow{L(f(t))} F(p), \quad F(p) \xrightarrow{\frac{1}{L(f(t))}} f(t)$$

**1- мысал**

Берілгені:

$$f(t) = e^{\alpha t}, \alpha = a + ib.$$

Табу керек:  $F(p)$

Шешуі:

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{\alpha t} e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p-a)t} dt = \frac{e^{-(p-a)t}}{-(p-a)} \Big|_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{1}{p-a}.$$

Жауабы:  $F(p) = \frac{1}{p-a} \Rightarrow e^{\alpha t}.$

## Қасиеттері:

### 1. СЫЗЫҚТЫЛЫҚ:

$$af(t) + b\varphi(t) \Rightarrow aF(p) + b\Phi(p).$$

### 2. Ұқсастық:

$$f(at) \Rightarrow \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right).$$

### 3. Түп нұсқаны дифференциалдау:

$$f'(t) \Rightarrow pF(p) - f(0),$$

$$f''(t) \Rightarrow p^2 F(p) - pf(0) - f'(0),$$

$$f^{(n)}(t) \Rightarrow p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-1} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0), f^{(k)}(0) \quad (k = 1, 2, \dots, n-1).$$

## 2 - мысал

Берілгені:

$$f(t) = \sin^2 t$$

Табу керек:  $F(p)$

Шешуі:

$$f(t) \Rightarrow F(p),$$

$$f'(t) \Rightarrow pF(p) - f(0),$$

$$f(0) = 0,$$

$$f'(t) = 2 \sin t \cos t = \sin 2t \Rightarrow \frac{2}{p^2 + 4},$$

$$pF(p) = \frac{2}{p^2 + 4},$$

$$F(p) = \frac{2}{p(p^2 + 4)} \Rightarrow \sin^2 t.$$

$$\text{Жауабы: } F(p) = \frac{2}{p(p^2 + 4)} \Rightarrow \sin^2 t.$$

#### 4. Бейнені дифференциалдау:

$$F'(p) \Leftarrow -tf(t),$$

немесе жалпы формуласы:

$$F^{(n)}(p) \Leftarrow (-1)^n t^n f(t).$$

#### 5. Түп нұсқаны интегралдау:

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \Rightarrow \frac{F(p)}{p}.$$

**6. Бейнені интегралдау:** Егер интеграл  $\int_p^\infty F(p)dp$  жинақталатын болса, онда ол  $\frac{f(t)}{t}$  функциясының бейнесі болып табылады.

$$\frac{f(t)}{t} \Rightarrow \int_0^t F(p)dp.$$

**7. Кешігу:**

$$f(t - \tau) \Rightarrow e^{-p\tau} F(p).$$

**8. Ығысу теоремасы:**

$$e^{p_0 t} f(t) \Rightarrow f(p - p_0).$$



## 9. Көбейту теоремасы:

$$(f * \varphi)(t) \Rightarrow F(p) * \Phi(p).$$

Екі бейненің көбейтіндісі де бейне болып табылады, яғни:

$$F(p) * \Phi(p) \Rightarrow \int_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau.$$

Оң жақтағы интеграл  $f(t)$  және  $\varphi(t)$  функциялардың үйірткісі деп аталып  $f(t) * \varphi(t)$  түрінде белгіленеді.

### Кейбір функциялар үшін Лаплас түрлендіруінің кестесі

№	Түп нұсқа	Бейнесі
1	$f(t)$	$F(p)$
2	$af(t)$	$aF(p)$
3	$af_1(t) + bf_2(t)$	$aF_1(p) + bF_2(p)$
4	$\frac{df(t)}{dt}$	$pF(p)$
5	$\int f(t)dt$	$\frac{F(p)}{p}$
6	$1(t)$	$\frac{1}{p}$
7	$t$	$\frac{1}{p^2}$

8	$t^n$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
9	$e^{\pm\alpha t}$	$\frac{1}{p \pm \alpha}$
10	$t e^{\pm\alpha t}$	$\frac{1}{(p \pm \alpha)^2}$
11	$\delta(t)$	1
12	$f(t - \tau)$	$F(p)e^{-p\tau}$
13	$1(t - \tau)$	$\frac{1}{p} e^{-p\tau}$
14	$\frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}$	$\frac{1}{1 + Tp}$
15	$1 - e^{-\frac{t}{T}}$	$\frac{1}{p(1 + Tp)}$
16	$\sin\alpha t$	$\frac{\alpha}{p^2 + \alpha^2}$
17	$\frac{1}{\alpha} \sin\alpha t$	$\frac{1}{p^2 + \alpha^2}$
18	$\cos\alpha t$	$\frac{p}{p^2 + \alpha^2}$
19	$\frac{1}{\alpha^2} (1 - \cos\alpha t)$	$\frac{1}{p(p^2 + \alpha^2)}$
20	$e^{-\alpha t} \sin\alpha t$	$\frac{\alpha}{(p^2 + \alpha^2) + \alpha^2}$
21	$e^{-\alpha t} \cos\alpha t$	$\frac{p + \alpha}{(p^2 + \alpha^2) + \alpha^2}$
22	$\frac{1}{\alpha^2} (e^{-\alpha t} + \alpha t - 1)$	$\frac{1}{p^2(p + \alpha)}$

Ұсынылатын әдебиеттер:

1. Дорф Р., Бишоп Р. Современные системы управления. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2002. – 832 с.
2. Қыдырбекұлы А.Б. Автоматика негіздері : оқу құралы / Қыдырбекұлы А.Б., Ибраев Ғ.Е.. — Алматы: Казахский национальный университет им. аль-Фараби, 2014. — 114 с.
3. В.А. Бесекерский, Е.П. Попов. Теория систем автоматического управления. – С.-Пб.: Профессия, 2004. – 752 с.
4. Лукас В.А. Теория автоматического управления: Учебник для вузов. – Екатеринбург: Из-во УГГГА, 2002. – 675 с.
5. Kluever C. A. Dynamic systems: modeling, simulation, and control. – John Wiley & Sons, 2020.